ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Տոնոյան Տիգրան Անդրանիկի

Օպտիմիզացման խնդիրներ առանց լարի ցանցերում

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2010

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Тоноян Тигран Андраникович

Оптимизационные проблемы в беспроводных сетях

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван 2010

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Ա. Ալեքսանյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ս.Ե. Մարկոսյան
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ.Ն. Տոնոյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2010 թ. հունիսի 9-ին, ժամը 14.00-ին՝ ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 375025, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2010թ. մայիսի 6-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физ. мат. наук А.А. Алексанян

Официальные оппоненты: доктор физ. мат. наук С.Е. Маркосян
кандидат физ. мат. наук Р.Н. Тоноян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 9 июня 2010 г., в 14.00 часов на заседании специализированного совета 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” ВАК, при ЕГУ по адресу: 375025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 6 мая 2010г.

Ученый секретарь специализированного совета,
канд. физ. мат. наук: В.Ж.Думанян

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը

Թեմայի արդիականությունը: Առանց լարի ցանցերը կապի՝ ներկայումս բուռն զարգացում ապրող համակարգերից են, որոնց կիրառությունների քանակը անընդհատ ավելանում է: Այդ ցանցերի՝ տեղեկույթ տեղափոխելու քանակական և ալգորիթմական հատկությունները տեսականորեն ուսումնասիրելն ու ցանցերն այդ տեսանկյունից առավել արդյունավետ օգտագործելը հիմնական խնդիրներից մեկն է, որից կախված են ցանցի արագագործությունն ու կյանքի տևողությունը (սենսորային ցանցերի դեպքում): Այս խնդիրը մեծ մասամբ ուսումնասիրված է գրաֆային մոդելներում, որոնք փաստորեն բավականաչափ ճշգրիտ չեն ներկայացնում իրական ցանցերի հատկությունները: Այդ պատճառով վերջին տարիներին կատարվող հետազոտություններում դիտարկվում է ֆիզիկական մոդելը, որն ավելի ադեկվատ է ներկայացնում առանց լարի ցանցերում ազդանշանների հեռարձակման ու համադրման բնույթը:

Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները: Ատենախոսության աշխատանքի հիմնական նպատակն առանց լարի ցանցերի՝ տեղեկույթ տեղափոխելու հնարավորությունների տեսական ուսումնասիրումն է և ցանցերն այդ տեսակետից արդյունավետ օգտագործող ալգորիթմների մշակումը: Դիտարկվում են սևեռված գծային հզորություններով հերթագրման, ինչպես նաև հզորությունների նշանակմամբ հերթագրման խնդիրները: Քանի որ գծային հզորությունների նշանակումը, որպես էներգա-արդյունավետ նշանակում, համասեռ հզորությունների նշանակման պես ներկայումս հաճախ դիտարկվում է տարբեր խնդիրներում, որոնցից կարևորագույններից են հերթագումը և ուղեգծումը, այս աշխատանքում փորձ է արված ուսումնասիրել այդ նշանակման տեսական-ալգորիթմական հնարավորությունները հերթագրման տեսանկյունից: Մյուս կողմից, քանի որ գծային և համասեռ հզորությունները ցանցերի որոշ կառուցվածքների համար հեռու են օպտիմալ լինելուց, դիտարկվում է հզորությունների նշանակման և հերթագրման խնդիրը: Ատենախոսությունում դիտարկվում են նաև «փոքր աշխարհ» ցանցերի՝ էվկլիդյան հարթության վրա ոչ ուռուցիկ տիրույթներում բաշխված մոդելներ և հետազոտվում է ուղեգծման հարցն այդպիսի մոդելներում:

Հետազոտման օբյեկտը: Ատենախոսությունը հետազոտում է առանց լարի ցանցերը, դրանցում հաղորդակցությունների պահանջների բազմությունները, ինչպես նաև «փոքր աշխարհ» ցանցերը:

Հետազոտման մեթոդները: Ատենախոսության մեջ օգտագործվում են հավանականությունների տեսության, հաշվողական բարդության տեսության, մետրիկական տարածություններում վերլուծության, գրաֆների տեսության, դիսկրետ մաթեմատիկայի և էվկլիդյան երկրաչափության մեթոդները:

Արդյունքների նորությունը: Աշխատանքում ներկայացված արդյունքները նոր են և ունեն կարևոր տեսական նշանակություն՝ լրացնելով տվյալ ասպարեզում կատարված վերջին հետազոտությունները:

Արդյունքների կիրառական նշանակությունը: Գծային հզորություններն օգտագործող ցանցերում (մասնավորապես սենսորային ցանցերում, որտեղ էներգիայի խնայողությունն առաջնային նպատակ է) հերթագրման համար ստացված ալգորիթմներն ու քանակական բնութագրերը կարող են օգտագործվել արդյունավետ MAC (Medium Access Control) պրոտոկոլներ մշակելու և դրանց հնարավորությունները գնահատելու համար: Մյուս կողմից, այն ցանցերում, որտեղ արագագործությունն է առաջին պլանում, անհրաժեշտ է գտնել հզորությունների

նշանակումներ և հերթագրման ալգորիթմներ, որոնց դեպքում պահանջվող հաղորդակցությունները կատարվեն առավել կարճ ժամանակում: Հզորությունների նշանակման ու հերթագրման խնդրի համար ստացված արդյունքներն այդ ուղղությամբ կատարված քայլ են, որոնք ցույց են տալիս, որ պարզությամբ գծային ու համասեռ հզորությունների հետ համեմատելի՝ միջին հզորությունների նշանակմամբ կարելի է հասնել ավելի լավ արդյունքների:
Ստացված արդյունքների ապրոբացիան: Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում և ԵՊՀ դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի սեմինարում:
Հրատարակությունները: Ատենախոսության թեմայով հրատարակվել են երեք աշխատություններ, որոնց ցուցակը բերված է սեղմագրի վերջում:
Ատենախոսության կառուցվածքն ու ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ցանկից, ներածությունից, չորս գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից, ընդամենը՝ 98 էջ:

Ատենախոսության բովանդակությունը

Ներածությունում ներկայացվում են դիտարկվող խնդիրների ոչ ֆորմալ դրվածքն ու ծագումը, ինչպես նաև կիրառական նշանակությունը:

Առաջին գլխում ներկայացվում են ընդհանուր բնույթի գաղափարներ ու լեմմաներ աշխատանքում օգտագործված մեթոդների ու տեսությունների վերաբերյալ: Ներկայացված են հավանականությունների տեսության, հաշվողական բարդության տեսության, մետրիկական տարածությունների, գրաֆների տեսության ներածական գաղափարներ, ինչպես նաև ապացուցված են մի շարք ընդհանուր բնույթի լեմմաներ, որոնք օգտագործվում են հաջորդ գլուխներում:

Երկրորդ գլուխը նվիրված է առանց լարի ցանցերում գծային հզորություններով հերթագրման խնդրին: Ենթադրում ենք, որ առանց լարի ցանցի հանգույցները, որոնք կետային սարքեր են, անշարժ կերպով տեղադրված են հեռավորության d ֆունկցիայով և μ չափով որևէ X չափելի մետրիկական տարածության մեջ, որտեղ μ չափը բավարարում է հետևյալ պայմանին. ցանկացած երկու A և B գնդերի համար, որոնք ունեն համապատասխանաբար a և b շառավիղները, տեղի ունի

$$\frac{\mu(A)}{\mu(B)} \leq K\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

պայմանն ինչ-որ $K \geq 1$ և $m \geq 1$ հաստատունների համար, որոնք որոշվում են մետրիկական տարածությամբ:

Տրված է կապերի (հաղորդակցության պահանջների) $L = \{1,2,\ldots,n\}$ բազմությունը, որտեղ յուրաքանչյուր կապ v ներկայացվում է որպես ուղարկող s_v հանգույցի և ընդունող r_v հանգույցի զույգ: v կապից w կապ «ասիմետրիկ հեռավորությունը» հետևյալն է՝ $d_{vw} = d(s_v, r_w)$: Յուրաքանչյուր ուղարկող հանգույց s_v օժտված է $P_v = c_l d_{vv}^{\alpha}$ «գծային» հզորությամբ, որտեղ c_l-ը հաստատուն է: Համաձայն ֆիզիկական մոդելին՝ v կապի ընդունող հանգույցում w կապի ուղարկող հանգույցի ուղարկած ազդանշանն ունի $P_{wv} = \frac{P_w}{d_{wv}^{\alpha}}$ հզորությունը:

Ազդանշանների համադրման համար օգտագործում ենք *SINR(Signal to Interference plus Noise Ratio)* մոդելը, որի դեպքում v կապի r_v ընդունող հանգույցը հաջողությամբ ստանում է s_v-ից ուղարկված ինֆորմացիան այն և միայն այն դեպքում, երբ բավարարվում է հետևյալ սահմանափակումը.

$$P_{vv} \geq \beta\left(\sum_{w \in S \backslash v} P_{wv} + N\right), \tag{1}$$

որտեղ $N \geq 0$ միջավայրի աղմուկն է, $\beta > 1$ նվազագույն SINR-ն է, որ անհրաժեշտ է ազդանշանն ապակոդավորելու համար, և S-ը v-ի հետ միաժամանակ հեռարձակող կապերի բազմությունն է: Կասենք, որ S-ը *SINR-թույլատրելի է*, եթե (1) սահմանափակումը բավարարվում է յուրաքանչյուր $v \in S$ կապի համար:

Հերթագրման խնդիրը հետևյալն է՝ տրված է կապերի բազմություն, պահանջվում է այն տրոհել նվազագույն քանակով SINR-թույլատրելի ենթախմբերի այնպես, որ այդ ենթախմբերից յուրաքանչյուրում բոլոր հաղորդակցությունները կարող են կատարվել միաժամանակ (համաձայն (1)-ին):

Կապերի S բազմության ազդեցություն v կապի վրա անվանում ենք հետևյալ գումարը՝

$$a_S(v) = \sum_{w \in S \backslash v} \left(\frac{d_{ww}}{d_{wv}}\right)^{\alpha}:$$

Ազդեցության ֆունկցիաները ներմուծելով (1) պայմանն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$a_S(v) \leq \frac{1}{\beta} - \frac{N}{c_l}$$

որտեղ բանաձևերի պարզության համար աջ մասը կփոխարինենք $1/\beta$-ով:

Այս գլխում ներկայացվում է մոտարկման ալգորիթմ գծային հզորություններով հերթագրման խնդրի համար, որը հետևյալն է՝

1. Մուտք. կապերի $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ բազմություն
2. Տեսակավորել կապերը երկարությունների նվազման կարգով՝ $l_1, l_2, \ldots, l_n$
3. $S_i \leftarrow \varnothing, i = 1, 2, \ldots$

4. $t \leftarrow 1$

5. Գտնել նվազագույն i-ն, որի դեպքում $a_{S_i}(l_t) \le \frac{1}{c^{\alpha}}$

6. l_t կապն ավելացնել S_i բազմությանը՝ $S_i := S_i \cup l_t$

7. Եթե $t = n$, ապա անցնել 8.-ին, հակառակ դեպքում՝
$t \leftarrow t + 1$, անցնել 5.-ին

8. Ելք՝ արտածել $(S_1, S_2, \ldots)$ հերթը

Նկատենք, որ ալգորիթմի ձևակերպումը կախված է c պարամետրից. դրա արժեքը ճշգրտվում է ալգորիթմի կոռեկտության ուսումնասիրման ժամանակ:

Ապացուցվում է, որ c պարամետրի համապատասխան ընտրության դեպքում ալգորիթմը կոռեկտ է և ցույց է տրվում, որ ալգորիթմը հաստատուն գործակցով մոտարկման ալգորիթմ է:

Հաղորդակցության պահանջների S բազմության և ցանցի p հանգույցի համար դիտարկենք հետևյալ մեծությունները՝

$$I_p(S) = \sum_{w \in S} \min\left\{1, \left(\frac{d_{ww}}{d(s_w, p)}\right)^{\alpha}\right\} \text{ և } I(S) = \max_p I_p(S):$$

Երբ դիտարկում ենք տրված բոլոր կապերի բազմությունը, նշված մեծությունը նշանակում ենք պարզապես $I(L) = I$:

Թեորեմ 1: ա) Եթե $c > 3$ և ալգորիթմի ելքում ստացված հերթը SINR-թույլատրելի է, ապա այն հաստատուն գործակցով մոտարկում է գծային հզորություններով հերթագրման խնդրի համար, և բ) գծային հզորությունների դեպքում օպտիմալ հերթի երկարությունը $\Theta(I)$ է:

Թեորեմ 1-ը լրացնում է գծային հզորություններով հերթագրման վերաբերյալ լավագույն հայտնի արդյունքը, որը հետևյալն է՝ տրված է հավանականային ալգորիթմ, որն աշխատում է ցանկացած մետրիկական տարածության համար, և կառուցում է $O(I + \log^2 n)$ երկարությամբ հերթ՝ «մեծ հավանականությամբ»:

Սահմանվում են նաև այսպես կոչված *երկարության համապատասխան հզորությունների նշանակումները*, և օգտագործելով գծային հզորությունների համար ալգորիթմը, ցույց է տրվում, որ դրանց համար օպտիմալ հերթի երկարությունը $O(I \log \Lambda)$ է, որտեղ $\Lambda = max_{v,w \in L} \frac{d_{vv}}{d_{ww}}$:

Օգտագործելով գծային հզորությունների համար ստացված արդյունքները՝ տրվում է ալգորիթմ նաև *միջմակարդակային մինիմիզացիայի* խնդրի համար, որը հետևյալն է:

Ցանցում տրված է (s_i, r_i) սկզբնաղբյուր-նպատակակետ հանգույցների k զույգերի բազմություն, որտեղ s_i սկզբանղբյուրը պետք է տվյալներ ուղարկի r_i նպատակակետին: Պահանջվում է՝

1. բոլոր զույգերի համար գտնել ճանապարհներ, որոնցով տվյալները կփոխանցվեն գուցե և մի քանի հաջորդական հաղորդումների միջոցով,
2. նշանակել հանգույցների հզորությունները,
3. հերթագրել ստացված հաղորդումների բազմությունը նվազագույն քանակի ենթաբազմություններով:

Ներկայացվում է հավանականային ալգորիթմ, որը մոտարկում է միջմակարդակային մինիմիզացիայի խնդիրը $O(\log \Delta \log n)$ գործակցով, որտեղ Δ-ն ցանցում ամենահեռու հանգույցների հեռավորության և ամենամոտ հանգույցների հեռավորության հարաբերությունն է. սա բարելավում է հայտնի լավագույն արդյունքը $\log n$ գործակցով:

Այնուհետև սահմանվում է ՀԵՐԹԱԳՐՈՒՄ ճանաչման խնդիրը, որը գծային հզորություններով հերթագրման խնդրի պարզեցված տարբերակն է:

ՀԵՐԹԱԳՐՈՒՄ. տրված է առանց լարի ցանցում կապերի $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ բազմությունը, որոնց երկարությունները տարբերվում են ամենաշատը հաստատուն գործակցով, և բնական $K > 0$ թիվը, խնդիրն է՝ պարզել, գոյություն ունի արդյոք L բազմության տրոհում ոչ ավել քան K SINR-թույլատրելի ենթաբազմությունների՝ գծային հզորությունների նկատմամբ:

Ապացուցվում է հետևյալ պնդումը, որը ներկայացնում է հերթագրման խնդրի բարդությունը:

Թեորեմ 2: Գոյություն ունեն մետրիկական տարածություններ, որտեղ ՀԵՐԹԱԳՐՈՒՄ խնդիրը NP-դժվար է, և չի կարող մոտարկվել 1.5-ից փոքր գործակցով, եթե $P \neq NP$:

Երրորդ գլխում դիտարկվում է առանց լարի ցանցերում հզորությունների նշանակման և հերթագրման խնդիրը, որտեղ պահանջվում է հանգույցներին նշանակել որոշակի հզորություններ և հերթագրել հաղորդակցություններն այնպես, որ դրանք կատարվեն նվազագույն ժամանակում՝ հաշվի առնելով զուգահեռ հաղորդող հանգույցների ազդանշանների համադրումը: Խնդիրը դիտարկվում է հաղորդակցման երկու մոդելներում՝ ուղղորդված և երկկողմանի. ուղղորդված մոդելի դեպքում միայն ուղարկող հանգույցն է օժտված հեռարձակելու հնարավորությամբ, իսկ երկկողմանի մոդելի դեպքում ուղարկող և ընդունող հանգույցներն ունեն հավասար հզորություններ: SINR պայմանը երկկողմանի մոդելի համար ձևափոխվում է՝ հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ ընդունող հանգույցները նույնպես կարող են «աղմուկ» առաջացնել այլ հանգույցների համար:

Այստեղ նույնպես տրված է $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ կապերի բազմությունը, որտեղ յուրաքանչյուր v ներկայացնում է հաղորդակցության պահանջ s_v և r_v հանգույցների միջև: Ցանցի հանգույցները տեղադրված են մետրիկական տարածության մեջ՝ հեռավորության d ֆունկցիայով: d_{vw} ասիմետրիկ հեռավորությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ. երբ դիտարկվում է հաղորդակցման *ուղղորդված մոդելը*, ապա

$$d_{vw} = d(s_v, r_w),$$

և երբ դիտարկվում է *երկկողմանի մոդելը*, ապա

$$d_{vw} = \min\{d(s_v, r_w), d(s_v, s_w), d(r_v, r_w), d(r_v, s_w)\}:$$

Կապի երկարությունը նշանակենք $l_v = d_{vv}$:

Յուրաքանչյուր v *կապի* համապատասխանում է հզորություն՝ $P_v > 0$: Այստեղ նույնպես օգտագործվում է ազդանշանների տարածման ֆիզիկական մոդելը և ազդանշանների համադրման SINR մոդելը, որտեղ v կապին համապատասխան հաղորդակցությունը հաջող կատարվում է այն և միայն այն դեպքում, երբ հետևյալ պայմանը կատարվում է.

$$\frac{P_v / l_v^{\alpha}}{\sum\limits_{w \in S \setminus \{v\}} P_w / d_{wv}^{\alpha} + N} > \beta,$$

Համարվում է, որ $N = 0$ (այսինքն՝ անտեսվում է միջավայրի աղմուկը):

Հզորությունների նշանակման և հերթագրման խնդրում տրված է կապերի L բազմությունը, և պահանջվում է նշանակել հանգույցների հզորությունները և տրոհել L բազմությունը SINR-թույլատրելի ենթաբազմությունների՝ ընտրված հզորությունների նշանակման նկատմամբ, այնպես, որ ենթաբազմությունների քանակը լինի նվազագույնը: Այս խնդիրը կանվանենք ՀՆ-հերթագրման խնդիր (հզորությունների նշանակմամբ հերթագրման խնդիր): Նկատենք, որ խնդիրը դրվում է հերթագրման և՛ ուղղորդված, և՛ երկկողմանի մոդելների դեպքում:

ՀՆ-հերթագրման խնդիրը մոտարկելու համար դիտարկվում է հզորությունների *միջին կամ քառակուսային արմատի* նշանակումը, որի դեպքում v կապի հանգույցը ստանում է $P_v = d_{vv}^{\alpha/2}$ հզորություն: Կապերի բազմությունը կոչվում է համարյա հավասարաերկար, եթե այդ կապերի երկարությունները տարբերվում են առավելագույնը հաստատուն անգամ:

Հզորությունների նշանակման և հերթագրման խնդիրը դիտարկող վերջին աշխատանքներից մեկում[1] առաջադրվում են հետևյալ պնդումները:

Պնդում: Դիտարկենք հերթագրման ուղղորդված մոդելը: Ենթադրենք գոյություն ունի բազմանդամային ալգորիթմ, որը համարյա հավասարաերկար կապերի բազմության համար ՀՆ-հերթագրման խնդիրը մոտարկում է ρ գործակցով: Այդ դեպքում գոյություն ունի ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\rho \log\log \Lambda \log n)$-մոտարկող ալգորիթմ, որն օգտագործում է միջին հզորությունների նշանակումը:

Պնդում: Դիտարկենք երկկողմանի մոդելը: Ենթադրենք ՀՆ-հերթագրման խնդրի համար գոյություն ունի ρ-մոտարկող ալգորիթմ համարյա

---

[1] M.M. Halldorsson, Wireless Scheduling with Power Control. Proc. 17th annual European Symposium on Algorithms (ESA), pages 361-372, 2009.

հավասարաերկար կապերի բազմությունների համար: Այդ դեպքում գոյություն ունի ՅՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\rho \log n)$-մոտարկող ալգորիթմ, որն օգտագործում է միջին հզորությունների նշանակումը:

Նշված պնդումներն առաջադրվում են կամայական մետրիկական տարածությունների համար: Այս գլխում ցույց է տրվում, որ վերը նշված պնդումները *ստույգ չեն*:

Այնուհետև դիտարկվում են միջին հզորություններով ցանցերը մարող մետրիկաներում, որոնք սահմանվում են հետևյալ կերպ:

Դիցուք X-ը d մետրիկայով մետրիկական տարածություն է:$Y \subset X$ բազմությունը կոչվում է *r-փաթեթ (r-packing)*, եթե $d(p,q) > 2r$ տարբեր $p,q \in Y$ կետերի բոլոր զույգերի համար: X տարածության r-փաթեթավորման թիվը` $\Pi(X,r)$, ամենամեծ $r$-փաթեթի մեծությունն է (բազմության հզորության իմաստով): $X$ տարածության *կրկնապատկման չափողականությունը (doubling dimension)* այն $t$ մեծությունն է, որի համար բավարարվում է հետևյալ պայմանը`

$$\sup_{x \in X, R>0} \Pi(B_R(x), eR) = C/e^t \text{ երբ } e \to 0,$$

որտեղ C-ն հաստատուն է: *Կրկնապատկող մետրիկական տարածությունները (doubling metric space)* վերջավոր կրկնապատկման չափողականություն ունեցող տարածություններն են: Հայտնի է, որ k չափանի էվկլիդյան տարածությունը կրկնապատկող մետրիկական տարածություն է` կրկնապատկման k չափողականությամբ:

Այս գլխում համարվում է, որ առանց լարի ցանցը տեղակայված է որևէ m կրկնապատկող չափողականությամբ մետրիկական տարածության մեջ, և ենթադրվում է, որ $\alpha > m$: Մետրիկական տարածության և α գործակցի այսպիսի զույգն անվանում են *մարող մետրիկա*:

Կապերի S բազմության ազդեցությունը v կապի վրա հետևյալն է`

$$a_S(v) = \sum_{w \in S \setminus \{v\}} \frac{P_w / d_{wv}^{\alpha}}{P_v / l_v^{\alpha}} = \sum_{w \in S \setminus \{v\}} \frac{P_w}{P_v} \cdot \frac{l_v^{\alpha}}{d_{wv}^{\alpha}}$$

Կապերի բազմությունը կամ հերթը կանվանենք *p-ազդանշանային*, եթե յուրաքանչյուր կապի վրա միաժամանակ հեռարձակող կապերի ազդեցությունը չի գերազանցում $1/p$: Նկատենք, որ բազմությունը SINR-թույլատրելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն 1-ազդանշանային բազմություն է:

Երկու կապերի` $v$ և $w$, անվանում ենք *$q$-անկախ*, եթե դրանք բավարարում են հետևյալ սահմանափակմանը`

$$d_{vw} d_{wv} > q^2 l_w l_v :$$

Կապերի S բազմությունն անվանում ենք q-անկախ, եթե դրա մեջ եղած կապերը զույգ առ զույգ q-անկախ են:

Կասենք, որ կապերի S բազմությունը *բաժանված է*, եթե S-ի ցանկացած երկու կապերի երկարությունները տարբերվում են 2 անգամից քիչ կամ $n^{2/\alpha}$ անգամից շատ:

Կասենք, որ v և w կապերը τ*-մոտ* են միջին հզորությունների նկատմամբ, եթե $\max\{a_v(w), a_w(v)\} \geq \tau$, այսինքն՝ կապերից առնվազն մեկն ազդում է մյուսի վրա առնվազն τ-ով:

Կասենք, որ կապերի $S \subseteq L$ բազմությունն ունի $B(p)$ *հատկությանը* $p > 0$ թվի համար, եթե ցանկացած $v \in L \setminus S$ կապի համար S-ում գոյություն ունեն ամենաշատը p կապեր, այնպիսի՝ որ $n^{2/\alpha} l_v \leq l_w$, և w-ն $\frac{1}{2n}$-մոտ է v-ին:

Դիտարկում ենք մարող մետրիկաներ:

Որևէ $q \geq 1$ հաստատունի համար դիտարկենք կապերի L բազմության q-անկախ Q ենթաբազմություն: Նկարագրենք ալգորիթմ, որը, եթե Q-ն բավարարում է $B(p)$ հատկությանը ինչ-որ $p > 0$ թվի համար, հերթագրում է Q-ն $O(p \log n)$ բազմություններով՝ օգտագործելով հզորությունների միջին նշանակումը.

1. Մուտք. $B(p)$ հատկությանը բավարարող q-անկախ բազմույուն՝ Q
2. Ներկայացնել $Q = \bigcup_i Q_i$, որտեղ $Q_i = \{t \in Q \mid l_t \in [2^{i-1} l_{min}, 2^i l_{min})\}$, $l_{min} = \min_{t \in Q} l_t$
3. Նշանակել՝ $B_i \leftarrow \bigcup_j Q_{i+j \cdot \frac{2}{\alpha} \log n}$, $i = 1,2,\ldots,\frac{2}{\alpha}\log n$
4. Յուրաքանչյուր Q_i ձևափոխել f-ազդանշանային հերթի՝ $Q_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} S_i^j$, որտեղ $f = 2^{\alpha/2+1}$ և $k_i = O((f/q^\alpha)^2)$
5. $j \leftarrow 1$
   - 5.1. Նշանակել $S \leftarrow \bigcup_i S_i^j$. եթե $k_i < j$, ապա $S_i^j \leftarrow \varnothing$
   - 5.2. Տեսակավորել S բազմության կապերն ըստ երկարությունների չաճման կարգի. $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_{|S|}$:
   - 5.3. $k \leftarrow 1$, $T_j^s \leftarrow \varnothing, s = 1,2,\ldots, p+1$

5.3.1. Գտնել այն T_j^s բազմությունը, որի՝ $n^{2/\alpha}l_k$ -ից երկար կապերից ոչ մեկը l_k -ին $1/(2n)$ -մոտ չեն, և վերագրել $T_j^s \leftarrow T_j^s \bigcup \{l_k\}$

5.3.2. $k \leftarrow k+1$. եթե $k \le |S|$, ապա անցնել 5.3.1-ին

5.4. $j \leftarrow j+1$. եթե $j \le \max k_i$, ապա անցնել 5.1-ին, հակառակ դեպքում ավարտել, արտածելով $\{T_j^s\}$ հերթը

Այդ ալգորիթմի հիման վրա ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3: Դիտարկենք կապերի L բազմության q-անկախ $Q = \{1,2,\ldots,k\}$ ենթաբազմությունը որևէ $q \ge 1$ թվի համար, որի համար $B(p)$ հատկությունը տեղի ունի: Այդ դեպքում կարելի է կառուցել բազմանդամային ալգորիթմ, որը հերթագրում է Q-ն $O(p\log n)$ ենթաբազմություններով՝ օգտագործելով միջին հզորությունների նշանակումը:

Նախորդ թեորեմն օգտագործելով՝ ստացվում է հետևյալը:

Հետևանք 4: Հերթագրման ուղղորդված մոդելի դեպքում միջին հզորությունների նշանակումը մարող մետրիկաներում մոտարկում է ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\log n \operatorname{loglog} \Lambda)$ գործակցով: Երկկողմանի մոդելի դեպքում միջին հզորությունների նշանակումը մարող մետրիկաներում մոտարկում է ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\log n)$ գործակցով:

Այնուհետև, օգտագործելով մարող մետրիկաներում տեղադրված գրաֆների համար ներկման ալգորիթմ, նախորդ թեորեմի երկրորդ մասը վերածվում է ալգորիթմական արդյունքի՝ տրվում է մոտարկման ալգորիթմ, որը երկկողմանի մոդելի դեպքում մոտարկում է ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\log n)$ գործակցով՝ մարող մետրիկաներում: Այդ ալգորիթմն օգտագործում է միջին հզորությունների նշանակումը:

Հետևանք 5: Երկկողմանի մոդելի դեպքում կարելի է կառուցել բազմանդամային ալգորիթմ, որը մարող մետրիկաներում մոտարկում է ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\log n)$ գործակցով՝ օգտագործելով միջին հզորությունների նշանակումը:

Նախորդ թեորեմի արդյունքը մարող մետրիկաների համար բարելավում է հայտնի լավագույն արդյունքը, որի դեպքում մոտարկման գործակիցը $O(\log^{4.5+\alpha} n)$ էր:

Չորրորդ գլխում դիտարկվում է «փոքր աշխարհ» ցանցերում ուղեգծման խնդիրը: Որպես հիմք դիտարկվում է «փոքր աշխարհ» ցանցերի համար էվկլիդյան հարթության վրա միավոր շրջանում վերջերս կառուցված մոդելը, որն այստեղ ձևափոխվում է՝ ներմուծելով *արգելված տիրույթների* գաղափարը: «Աշխարհը»

$W = \{x : \|x\| \leq 1\}$ միավոր շրջանն է էվկլիդյան հարթության վրա: N ցանցը սահմանվում է հավանականային գործընթացով, որտեղ յուրաքանչյուր $u \in W$ կետի համար սահմանվում են *լոկալ կապերը* և *հեռավոր կապի* հավանականային բաշխումը: W-ում ներմուծվում է ուռուցիկ տիրույթ՝ H, որտեղ ցանցի հանգույցներ չեն կարող գտնվել: H-ն անվանում ենք արգելված տիրույթ:

u կետի և $r > 0$ թվի համար նշանակում ենք $B_r(u)$-ով u կենտրոնով և r շառավղով շրջանը: $B_r(u)$-ի եզրը՝ $\partial B_r(u)$, u կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծն է:

Դիցուք $\varepsilon > 0$ և $\varepsilon << 1$: u կետում գտնվող հանգույցի կապերը սահմանվում են հետևյալ կերպ:

Լոկալ կապեր: Նշանակենք՝ $D_\varepsilon(u) = \partial B_\varepsilon(u) \cap (W \setminus H)$: Դիտարկենք $D_\varepsilon(u)$ բազմության տրոհումը հաստատուն քանակի աղեղների, որոնցից յուրաքանչյուրի կենտրոնական անկյունը փոքր է $\frac{\pi}{4}$-ից, և այդ աղեղներից յուրաքանչյուրի վրա ընտրենք մի կետ, այնպես, որ յուրաքանչյուր $\frac{\pi}{4}$ աղեղի վրա առնվազն մի կետ ընտրված լինի: Ընտրված կետերում կլինեն u հանգույցի լոկալ կապերը:

Հեռավոր կապը: Հավասարաչափ բաշխումով ընտրենք u-ն որպես սկզբնակետ ունեցող միավոր վեկտոր՝ ξ: Նշանակենք

$$l_\varepsilon(u,\theta) = \{\lambda \in \Re : u + \lambda\xi \in (W \setminus B_\varepsilon(u))\},$$

որտեղ θ նշանակում ենք ξ և $-u$ վեկտորների կազմած անկյունը: ξ-ից անկախ՝ $l_\varepsilon(u,\theta)$ բազմությունից ընտրենք λ՝ համապատասխան հավանականային բաշխման, որի խտության ֆունկցիան հետևյալն է

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{C_\varepsilon(u,\theta)\,|\lambda|^a}, \text{ եթե } l_\varepsilon(u,\theta) \neq \varnothing,$$

որտեղ $a \geq 0$ պարամետր է իսկ $C_\varepsilon(u,\theta)$-ն նորմալացման գործակիցն է: u կետում գտնվող հանգույցի հեռավոր կապը $u + \lambda\xi$ կետում է, եթե $u + \lambda\xi \in W \setminus H$: Հակառակ դեպքում համարում ենք, որ *այդ հանգույցը հեռավոր կապ չունի*:

Այժմ ենթադրենք նշված կանոններով կառուցված է հաշվելի քանակով հանգույցներով ցանց՝ սկսած որևէ $s \in W$ կետից: s-ում գտնվող հանգույցը կրում է որոշ հաղորդագրություն, նպատակն է՝ գտնել *ապակենտրոնացված ալգորիթմ*, որն s-ից տարբեր ցանկացած t կետի համար հաղորդագրությունը s-ից հասցնի t-ի փոքր շրջակայք՝ քիչ քանակի քայլեր կատարելով: Այստեղ s-ը կոչվում է սկզբնաղբյուր, t-ն՝ նպատակակետ: Ապակենտրոնացված ալգորիթմ ասելով հասկանում ենք հետևյալ տիպի պրոցեդուրաները: Հաղորդագրությունն ուղարկվում է հաջորդաբար՝ ընթացիկ կրողից դրա կապերից մեկին (լոկալ կամ հեռավոր)՝ օգտագործելով միայն «լոկալ» տեղեկություններ և H տիրույթի դիրքը: Յուրաքանչյուր քայլում հաղորդագրության կրող հանգույցն ունի իր կապերի դիրքերը, t նպատակակետի դիրքը և H տիրույթի դիրքը, սակայն այն չունի, օրինակ, այլ հանգույցների հեռավոր կապերի դիրքերը: Ունենալով այս ինֆորմացիան՝ ընթացիկ հանգույցը պետք է ընտրի իր կապերից մեկին, և հաղորդագրությունն ուղարկի այդ կապին:

Ապակենտրոնացված ալգորիթմի հաղորդագրությունը տեղ հասցնելու *սպասված ժամանակը* հաղորդագրությունը մինչև նպատակակետի շրջակայք հասցնելը կատարված քայլերի քանակի մաթսպասումն է:

$H=\varnothing$ դեպքի համար հայտնի է, որ եթե $a=1$, ապա գոյություն ունի ապակենտրոնացված ալգորիթմ, որի՝ հաղորդագրությունը տեղ հասցնելու սպասված ժամանակը ցանկացած s,t զույգի համար չի գերազանցում $c\left(\log\frac{2}{\varepsilon}\right)^2$ ինչ-որ $c>0$ հաստատունի համար, որը կախված չէ ε-ից: Մյուս կողմից, յուրաքանչյուր $a>0$, $a\neq 1$ թվի համար գոյություն ունեն $k>0$ և $\gamma>0$ հաստատուններ՝ կախված միայն a-ից, այնպիսին, որ ինչ-որ s,t զույգերի համար ցանկացած ապակենտրոնացված ալգորիթմի՝ հաղորդագրությունը տեղ հասցնելու սպասված ժամանակը $k\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\gamma}$-ից փոքր չէ:

$a=1$ դեպքին համապատասխանող պատահական ցանցերը կանվանենք *արդյունավետ ուղեգծվող*, կամ ուղղակի *ուղեգծվող*:

Այստեղ մեզ հետաքրքրում է հետևյալ հարցը՝ եթե $a=1$, ո՞ր դեպքերում է վերը նշված եղանակով կառուցված ցանցը մնում ուղեգծվող, եթե ներմուծված է արգելված տիրույթ:

u կետի համար $NH(u)$-ով նշանակում ենք H տիրույթի այն կետը, որն ամենամոտն է u-ին: Նշանակենք $Int(H)=H\setminus\partial H$ H բազմության ներքին կետերի բազմությունը: Դիցուք $s\in N$ հանգույցը և $t\in W\setminus Int(H)$ կետն այնպիսին են, որ D շրջանը, որի համար st հատվածը տրամագիծ է, չի հատվում $Int(H)$ բազմության հետ: Այս գլխում ներկայացվում է *սահմանափակ ագահ* ալգորիթմը, որը կարճ կանվանենք RG: Այդ ալգորիթմը հաղորդագրությունը հասցնում է s հանգույցից t կետի 2ε-շրջակայք՝ այն «պահելով» D շրջանի սահմաններում:

Դիցուք հաղորդագրությունը գտնվում է $u \in D$ հանգույցում:

1. Եթե u-ն գտնվում է t կետի 2ε-շրջակայքում, ապա ավարտ
2. Եթե u հանգույցի v հեռավոր կապն ավելի մոտ է t-ին, քան u-ն, և $v \in D$, ապա ուղարկել հաղորդագրությունը v հանգույցին, հակառակ դեպքում հաղորդագրությունն ուղարկել այն լոկալ կապին, որն ավելի մոտ է t-ին, քան u-ն:

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6: RG ալգորիթմը հասցնում է հաղորդագրությունը s հանգույցից t կետի 2ε-շրջակայք՝ սպասված $O\left(\log^2 \frac{1}{\varepsilon}\right)$ քանակի քայլերի միջոցով:

Այնուհետև ցույց է տրվում, որ եթե սկզբնաղբյուր հանդիսացող հանգույցի ու նպատակակետի դիրքերը բավարարում են որոշ սահմանափակումների, ապա հնարավոր է գտնել հաղորդագրությունը դրանց միջև փոխանցելու կարճ ճանապարհ:

Թեորեմ 7: Եթե H և ∂W բազմությունների միջև հեռավորությունն առնվազն $b(\varepsilon)+4\varepsilon$ է, որտեղ $\varepsilon < b(\varepsilon) << 1$, ապա կարելի է կառուցել ալգորիթմ, որը ցանկացած s,t զույգի համար հաղորդագրությունը փոխանցում է՝ սպասված $O\left(\frac{1}{b(\varepsilon)}\log^2 \frac{1}{\varepsilon}\right)$ քայլերի միջոցով:

Մասնավորապես, եթե վերցնենք $b(\varepsilon) = \log^{-k} \frac{1}{\varepsilon},\ k \geq 1$ հաստատունի համար, ապա ունենք ալգորիթմ, որը ցանկացած սկզբնաղբյուր/նպատակակետ s,t զույգի համար հաղորդագրությունը s-ից հասցնում է t-ի շրջակայք սպասված $O\left(\log^{k+2} \frac{1}{\varepsilon}\right)$ քայլերի միջոցով:

Վերջում նշենք, որ նախորդ թեորեմում տրված ալգորիթմը կարող է ընդհանրացվել մեկից ավելի միմյանց հետ չհատվող ուռուցիկ «արգելված տիրույթների» համար: Դա կարող է արվել այն սահմանափակման դեպքում, որ նշված տիրույթներից յուրաքանչյուր երկուսի հեռավորությունն առնվազն տրված մեծությունն է:

Հիմնական դրույթներն ու եզրահանգումները

Ատենախոսությունում դիտարկվել են առանց լարի ցանցերում գծային հզորություններով հերթագրման, հզորությունների նշանակման և հերթագրման (ՀՆ-հերթագրման), ինչպես նաև «փոքր աշխարհ» ցանցերում ուղեգծման խնդիրները: Ստացված հիմնական արդյունքները հետևյալն են՝

1. էվկլիդյան տարածությունների որոշակի ընդհանրացում հանդիսացող մետրիկական տարածություններում տեղակայված ցանցերում գծային հզորություններով հերթագրման խնդրի համար ստացվել է հաստատուն գործակցով ալգորիթմ, ինչպես նաև ցույց է տրվել օպտիմալ հերթի երկարության կարգը,
2. սահմանվել են երկարությանը համապատասխան հզորության նշանակումները, և տրվել է վերին գնահատական այդ նշանակումներին համապատասխան օպտիմալ հերթերի երկարությունների համար,
3. կիրառելով գծային հզորություններով հերթագրման ալգորիթմը՝ տրվել է հավանականային մոտարկման ալգորիթմ միջմակարդակային մինիմիզացիայի խնդրի համար,
4. ցույց է տրվել, որ որոշ մետրիկական տարածություններում գծային հզորություններով հերթագրման խնդիրը հնարավոր չէ մոտարկել 1.5-ից փոքր գործակցով, եթե $P \neq NP$,
5. ՀՆ-հերթագրման խնդրի համար դիտարկվել է միջին հզորությունների նշանակումը, և ցույց է տրվել, որ այդ նշանակմանը համապատասխան օպտիմալ հերթի երկարությունը հաղորդակցման ուղղորդված մոդելի դեպքում մոտարկում է ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\log n \log\log \Lambda)$ գործակցով՝ մարող մետրիկաներում,
6. հաղորդակցման երկկողմանի մոդելի համար ներկայացվել է միջին հզորությունների նշանակման համար ալգորիթմ, որի ելքում ստացված հերթը մոտարկում է ՀՆ-հերթագրման խնդիրը $O(\log n)$ գործակցով,
7. ներմուծվել է «արգելված տիրույթների» հասկացությունը «փոքր աշխարհ» ցանցերի որոշ մոդելի համար՝ ուսումնասիրելով այդպիսի ցանցերի ոչ ուռուցիկ մոդել. ներկայացվել է «սահմանափակ ագահ» ալգորիթմը, որի միջոցով հաղորդագրությունը արդյունավետ փոխանցվում է սկզբնաղբյուր/նպատակակետ զույգի որոշ «հաջող» դասավորության դեպքում, ինչպես նաև ցույց է տրվել, որ եթե արգելված տիրույթները գտնվում են միմյանցից և ցանցի բաշխման տիրույթի եզրից բավական հեռավորության վրա, ապա կարելի է կառուցել ապակենտրոնացված ալգորիթմ, որը սկզբնաղբյուր/նպատակակետ ցանկացած զույգի համար հաղորդագրությունն արդյունավետ փոխանցում է սկզբնակետից նպատակակետի փոքր շրջակայք, այսինքն՝ ցանցն ուղեգծվող է:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրատարակված աշխատությունները

1. Tigran Tonoyan. *On the Problem of Wireless Scheduling with Linear Power Levels*. Mathematical Problems of Computer Science, Transactions of IPIA NAS RA, vol. 33, 2010, pages 111-120.
2. Tigran Tonoyan. *On the Complexity of the Problem of Wireless Scheduling with Linear Powers*. Вестник ГИУА, серия Моделирование, Оптимизация, Управление, вып. 13, том 1, 2010, стр. 113-119.
3. Tigran Tonoyan. *On the Problem of Scheduling with Power Control in Wireless Networks*. Вестник ГИУА, серия Моделирование, Оптимизация, Управление, вып. 13, том 1, 2010, стр. 120-129.

Тоноян Тигран Андраникович
Оптимизационные проблемы в беспроводных сетях
Резюме

В диссертации рассмотрены проблемы составления расписаний с линейными мощностями в беспроводных сетях, составления расписаний с контролем мощностей в беспроводных сетях, а также проблема трассировки в сетях “маленький мир”. Получены следующие основные результаты:

1. для задачи составления расписаний с линейными мощностями для беспроводных сетей, расположенных в метрических пространствах, которые являются некоторым обобщением евклидовых пространств, получен аппроксимационный алгоритм с константным коэффициентом, а также получен порядок длины оптимальной очереди,
2. определены назначения мощностей, соответствующие длине, и получена верхняя оценка длин оптимальных расписаний, соответствующих этим назначениям,
3. используя алгоритм для составления расписаний с линейными мощностями, получен вероятностный алгоритм для аппроксимации проблемы межуровневой минимизации,
4. показано, что в некоторых метрических пространствах проблема составления расписаний с линейными мощностями не может быть аппроксимирована с коэффициентом, меньшим 1.5, если $P \neq NP$,
5. для проблемы составления расписаний с управлением мощностей рассмотрено назначение средних мощностей и показано, что при направленной модели трансляции длина оптимальной очереди при среднем назначении аппроксимирует задачу с коэффициентом $O(\log n \log\log \Lambda)$ в угасающих метриках,
6. для двусторонней модели трансляции получен алгоритм для среднего назначения мощностей, который на выходе дает расписание, которое аппроксимирует задачу составления расписаний с управлением мощностей с коэффициентом $O(\log n)$ в угасающих метриках,
7. введено понятие “запрещенной области” для некоторой модели сетей “маленький мир”, таким образом рассмотрена невыпуклая модель таких сетей, приведен “ограниченно жадный” алгоритм, с помощью которого сообщение эффективно доставляется при “хорошей” расстановке узла-источника и целевой точки, а также показано, что если запрещенные области достаточно далеки от границы сети и друг от друга, то можно построить децентрализованный алгоритм, который эффективно доставляет сообщение с произвольного узла-источника в окрестность произвольной целевой точки, что означает, что такое семейство сетей “трассируемо”.

Tonoyan Tigran
Optimization problems in wireless networks